№ 1 (10 баллов)

Есть две группы шестеренок. Первая содержит шестеренки с 12, 28 и 52 зубьями. Вторая содержит шестеренки с 8, 20 и 44 зубьями. Шестеренки каждой из групп могут приходить в зацепление только с шестеренками из своей группы. При этом шестеренки из обеих групп могут быть размещены на осях одного типа.

Вам нужно собрать два набора шестеренок. Известно, что первый набор составлен из пяти шестеренок первой группы. В нем точно есть одна шестеренка с 12 зубьями, одна шестеренка с 28 зубьями и одна шестеренка с 52 зубьями.

Известно, что второй набор составлен из шести шестеренок второй группы. В нем точно есть одна шестеренка с 8 зубьями, одна шестеренка с 20 зубьями и одна шестеренка с 44 зубьями.

Из всех шестеренок этих двух наборов был собран механизм, принципиальная кинематическая схема которого приведена на *рисунке 1*.

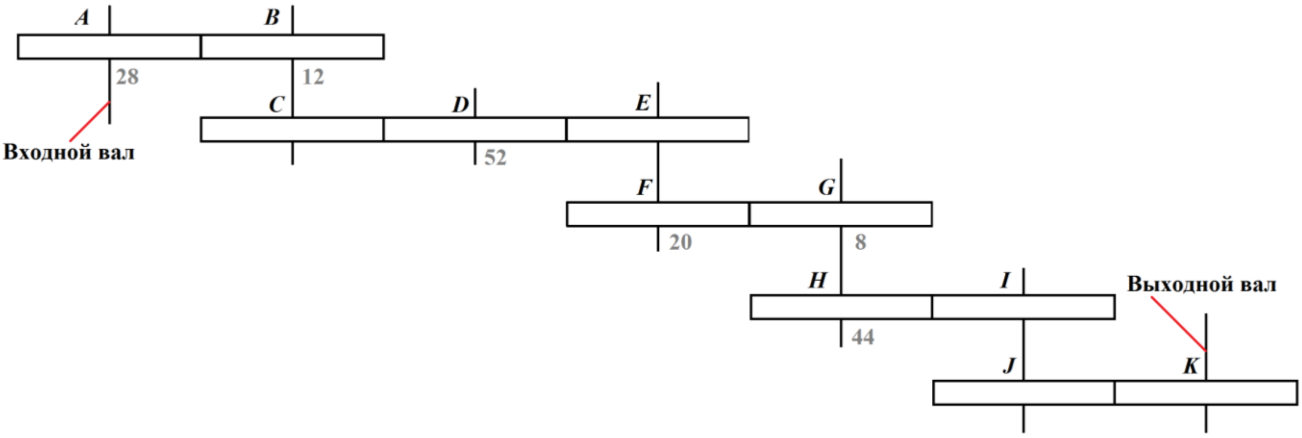


Рисунок 1

На данной схеме не указано количество зубьев части шестеренок. Известно, что передаточное отношение данного механизма равно 156:1225.

1) Определите состав каждого из наборов шестеренок (для этого заполните *таблицы 1* и *2*). Свое решение обоснуйте.

2) Приведите расчет передаточного отношения предложенного Вами механизма.

Справочная информация

Принципиальная кинематическая схема — это схема, на которой показана последовательность передачи движения от входного вала через передаточный механизм к выходному валу.

На кинематических схемах изображают только те элементы механизма, которые принимают участие в передаче движения (шестеренки, валы и др.), без соблюдения размеров и пропорций.

Предположим, есть два набора шестеренок. В первом наборе находятся две шестеренки с 33 зубьями и одна шестеренка с 18 зубьями, а во втором – одна шестеренка с 22 зубьями и одна шестеренка с 44 зубьями.

Из всех имеющихся шестеренок был собран механизм, принципиальная кинематическая схема которого приведена на рисунке 2:

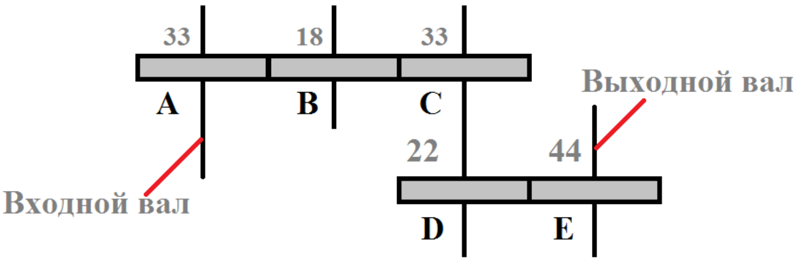


Рисунок 2

Данная схема содержит пять шестеренок. Шестеренка A находится на входном валу, шестеренка E – на выходном валу. Шестеренки C и D находятся на одном валу.

Если провести расчет передаточного отношения данного механизма, то оно будет равно 2:

$$\frac{18}{33} \times \frac{33}{18} \times \frac{44}{22} = 2$$

Ответ:

Набор № 1 (*таблица 1)*				
Шестеренка A	***Шестеренка B***	***Шестеренка C***	***Шестеренка D***	***Шестеренка E***
28	12	***28***	52	***52***

Набор № 2 (*таблица 2)*					
Шестеренка F	***Шестеренка G***	***Шестеренка H***	***Шестеренка I***	***Шестеренка J***	***Шестеренка K***
20	8	44	***44***	***20***	***8***

Второй вариант заполнения *таблицы 2*:

Набор № 2 (*таблица 2)*					
Шестеренка F	***Шестеренка G***	***Шестеренка H***	***Шестеренка I***	***Шестеренка J***	***Шестеренка K***
20	8	44	***8***	***20***	***44***

Проведем расчет передаточного отношения, получившегося у нас механизма:

$$\frac{12}{28} \times \frac{52}{28} \times \frac{52}{52} \times \frac{8}{20} \times \frac{8}{44} \times \frac{44}{20} = \frac{12 \times 52 \times 52 \times 8 \times 8 \times 44}{28 \times 28 \times 52 \times 20 \times 44 \times 20} = \frac{156}{1225}$$

Критерии проверки:

№ пп	Баллы	Описание
1.1	+1 балл	Правильно вычислено количество зубьев шестеренки C
	+1 балл	Правильно вычислено количество зубьев шестеренки E
	+2 балла	Правильно вычислено количество зубьев шестеренки I
	+2 балла	Правильно вычислено количество зубьев шестеренки J
	+2 балла	Правильно вычислено количество зубьев шестеренки K
1.2	+2 балла	Приведен верный подсчет передаточного отношения конфигурации, соответствующей условию задачи

Решение:

Разложим на множители числитель и знаменатель дроби, обозначающей передаточное отношение:

$$156 = 2 \times 2 \times 3 \times 13$$

$$1225 = 5 \times 5 \times 7 \times 7$$

Запишем возможные передаточные отношения, которые мы можем получить, соединяя шестеренки по группам.

В первой группе три вида шестеренок. Соответственно, можно получить шесть вариантов передаточных отношений, отличных от единицы:

$$\frac{12}{28} = \frac{3}{7} \text{ или } \frac{28}{12} = \frac{7}{3}$$

$$\frac{12}{52} = \frac{3}{13} \text{ или } \frac{52}{12} = \frac{13}{3}$$

$$\frac{28}{52} = \frac{7}{13} \text{ или } \frac{52}{28} = \frac{13}{7}$$

Во второй группе три вида шестеренок. Соответственно, можно получить еще шесть вариантов передаточных отношений, отличных от единицы:

$$\frac{8}{20} = \frac{2}{5} \text{ или } \frac{20}{8} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{8}{44} = \frac{2}{11} \text{ или } \frac{44}{8} = \frac{11}{2}$$

$$\frac{20}{44} = \frac{5}{11} \text{ или } \frac{44}{20} = \frac{11}{5}$$

Если в передаточном отношении все шестеренки будут с одинаковым количеством зубьев, то такое передаточное отношение будет равно единице:

$$\frac{12}{12} = \frac{28}{28} = \frac{52}{52} = 1 = \frac{8}{8} = \frac{20}{20} = \frac{44}{44}$$

Проанализируем наше разложение на множители чисел 156 и 1225. При этом учтем, что множитель с числом 7 в знаменателе мы можем получить только из отношений шестеренок первой группы, а с числом 5 в знаменателе – только из отношений шестеренок второй группы:

$$\frac{156}{1225} = \frac{2 \times 2 \times 3 \times 13}{5 \times 5 \times 7 \times 7} = (\frac{3}{7} \times \frac{13}{7}) \times (\frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times 1)$$

Первая пара шестеренок (*A* и *B)* позволяет получить множитель $\frac{3}{7}$.

Шестеренка *D* – это «паразитная шестеренка». Она не влияет на итоговое передаточное отношение.

Получается, что шестеренки *C* и *E* дают вклад в передаточное отношение в виде множителя $\frac{13}{7}$.

Это означает, что у шестеренки *C* должно быть 28 зубьев, а у шестеренки *E* должно быть 52 зуба.

Заполним пропуски в *таблице 1*:

Набор № 1 (*таблица 1)*				
Шестеренка A	***Шестеренка B***	***Шестеренка C***	***Шестеренка D***	***Шестеренка E***
28	12	***28***	52	***52***

Разберемся с расположением шестеренок из второй группы.

Шестеренки *F* и *G* дают вклад в передаточное отношение в виде сомножителя $\frac{2}{5}$.

Поскольку шестеренка *H* имеет 44 зуба, то с помощью нее и имеющихся в нашем распоряжении шестеренок нельзя получить второй множитель, равный $\frac{2}{5}$, однако можно получить множитель, равный 1. Соответственно, шестеренка *I* имеет столько же зубьев, сколько и шестеренка *H*, то есть у шестеренки *H* должно быть 44 зуба.

Получается, что шестеренки *J* и *K* дают вклад в передаточное отношение в виде сомножителя $\frac{2}{5}$.

Это означает, что у шестеренки *J* должно быть 20 зубьев, а у шестеренки *K* должно быть 8 зубьев.

Заполним пропуски в *таблице 2*:

Набор № 2 (*таблица 2)*					
Шестеренка F	***Шестеренка G***	***Шестеренка H***	***Шестеренка I***	***Шестеренка J***	***Шестеренка K***
20	8	44	***44***	***20***	***8***

Проведем расчет передаточного отношения получившегося у нас механизма:

$$\frac{12}{28}\times\frac{52}{28}\times\frac{52}{52}\times\frac{8}{20}\times\frac{44}{44}\times\frac{8}{20}=\frac{3}{7}\times\frac{13}{7}\times 1\times\frac{2}{5}\times 1\times\frac{2}{5}=\frac{3}{7}\times\frac{13}{7}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{156}{1225}$$

Рассуждая аналогичным образом, можно получить и второй способ заполнения *таблицы 2*:

Заполним пропуски в *таблице 2*:

Набор № 2 (*таблица 2)*					
Шестеренка F	***Шестеренка G***	***Шестеренка H***	***Шестеренка I***	***Шестеренка J***	***Шестеренка K***
20	8	44	***8***	***20***	***44***

Проведем расчет передаточного отношения получившегося у нас механизма:

$$\frac{12}{28}\times\frac{52}{28}\times\frac{52}{52}\times\frac{8}{20}\times\frac{8}{44}\times\frac{44}{20}=\frac{12\times52\times52\times8\times8\times44}{28\times28\times52\times20\times44\times20}=\frac{156}{1225}$$

№ 2 (15 баллов)

По полю, разделенному на клетки, передвигается робот-муравей. Он может двигаться в четырех направлениях (см. *таблицу 1*) и толкать перед собой ровно один кубик.

Команда	Направление движения робота
ВНИЗ N	↓
ВВЕРХ N	↑
ВЛЕВО N	←
ВПРАВО N	→

Таблица 1

```
НАЧАЛО
Y=1
      ПОВТОРИТЬ 3 РАЗ
            ВПРАВО 4
            ВНИЗ Y
            ВЛЕВО 4
            ВНИЗ Y
      КОНЕЦ ПОВТОРИТЬ
КОНЕЦ
```

Программа № 1

Обратите внимание, робот <u>не может</u> тянуть кубик, а также толкать два и больше кубиков!

Присваивание значения переменной: **Y = 2.**

Математические функции и операции записываются в виде стандартных математических обозначений из школьного курса: **Y = Y + 2.**

Рассмотрим пример программы (см. *программу № 1*) для робота-муравья и результаты ее выполнения в заданной конфигурации.

Если перед началом выполнения программы на поле была задана конфигурация в соответствии с *рисунком 3*, то после выполнения программы поле будет выглядеть, как показано на *рисунке 4*.

Рисунок 3

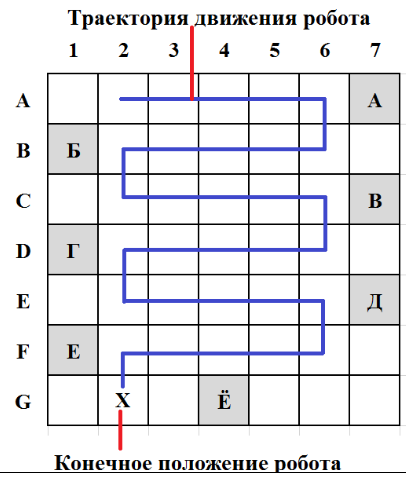


Рисунок 4

Если при выполнении программы робот пытается выйти за пределы поля или сдвинуть два кубика, то он разрушается, а программа завершается с ошибкой и не выполняется дальше.

Робот-муравей должен разместить кубики с буквами в соответствующих клетках: кубик с буквой «М» в клетке D1, кубик с буквой «О» в клетке E3, кубик с буквой «Ш» в клетке F5, кубик с буквой «К» в клетке G7. Робот должен начать и закончить движение в клетке A7.

Обстановка поля следующая (см. *рисунок 5*):

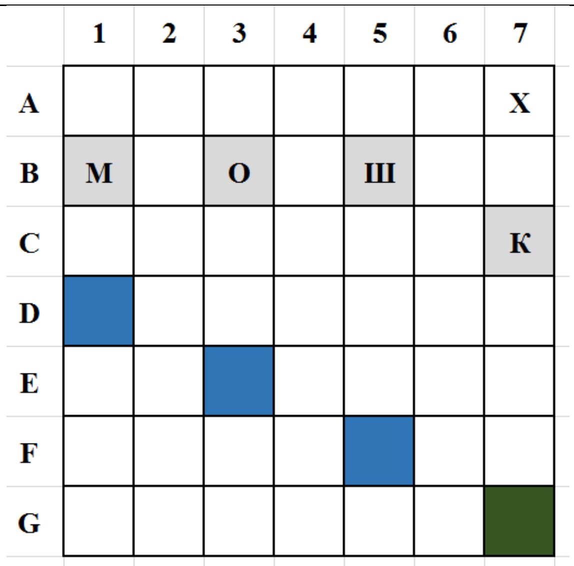


Рисунок 5

НАЧАЛО
Y =__________________
____
ПОВТОРИТЬ ____ РАЗ
____
____
____
____
____
КОНЕЦ ПОВТОРИТЬ
____
____
КОНЕЦ

Программа № 2

Допишите программу для робота-муравья, чтобы он смог выполнить поставленную перед ним задачу без разрушения робота. Для этого используйте заготовку программы (см. *программу № 2*).

При заполнении заготовки программы на каждой строке может располагаться ровно одна команда. При этом у Вас могут остаться пустые строки.

Ответ:

Вариант № 1	Вариант № 2
НАЧАЛО **Y = 2** **ВЛЕВО 6** **ПОВТОРИТЬ 3 РАЗ** **ВНИЗ Y** **ВПРАВО 1** **ВВЕРХ Y** **ВПРАВО 1** **Y = Y + 1** **КОНЕЦ ПОВТОРИТЬ** **ВНИЗ 5** **ВВЕРХ 5** **КОНЕЦ**	**НАЧАЛО** **Y = 2** **ВЛЕВО 6** **ПОВТОРИТЬ 3 РАЗ** **ВНИЗ Y** **ВВЕРХ Y** **ВПРАВО 2** **Y = Y + 1** **КОНЕЦ ПОВТОРИТЬ** **ВНИЗ 5** **ВВЕРХ 5** **КОНЕЦ**

Возможны и другие варианты написания программы.

Критерии проверки:

№ пп	№	Баллы	Описание
2	1	+3 балла	Правильно поставлен кубик «М»
	2	+3 балла	Правильно поставлен кубик «О»
	3	+3 балла	Правильно поставлен кубик «Ш»
	4	+3 балла	Правильно поставлен кубик «К»
	5	+3 балла	Робот после завершения программы вернулся в клетку B2. Засчитываются только в том случае, если по пунктам 1, 2, 3, 4 выставлено по 3 балла

В случае, если программа позволяет роботу выполнять поставленные перед ним задачи по размещению кубиков на соответствующих местах и не приводит к разрушению робота, но при этом не соответствует заданной в задаче структуре, то максимальное количество баллов по каждому из пунктов уменьшается в 2 раза.

Если робот после выполнения программы разрушается (выходит за границы поля, пытается сдвинуть два или более кубиков подряд), то за задачу ставятся баллы, накопленные до разрушения робота.

№ 3 (25 баллов)

Робот должен преодолеть трассу за минимальное время. От старта до финиша можно перемещаться только вдоль дорог, которые проложены между узловыми точками (см. *рисунок 6*). Дороги на *рисунке 6* обозначены сплошными линиями (то есть по дороге AB проехать можно, а по AC проехать нельзя).

Робот движется по ровной горизонтальной поверхности. Двигаться по дорогам робот должен так, чтобы центр колесной базы всегда оставался на черной линии.

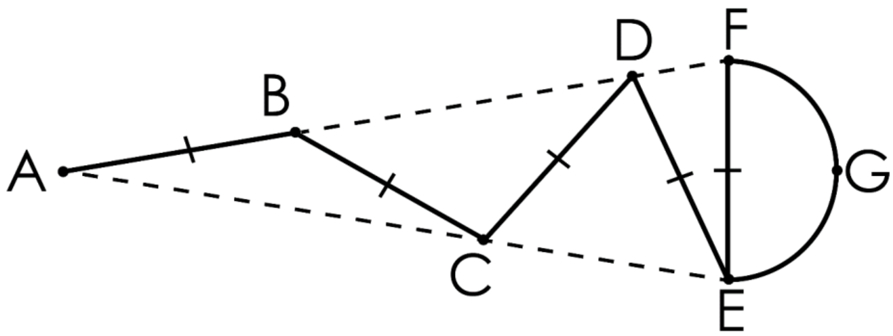


Рисунок 6

Известно, что трасса состоит из равных отрезков длиной 6 м и полуокружности (FE – диаметр). Также известно, что $AF = AE$.

Робот обязательно должен посетить все узловые точки и проехать по всем дорогам по одному разу. Точку старта выберите самостоятельно!

Робот оснащен двумя отдельно управляемыми колесами, расстояние между центрами колес составляет L = 100 см, радиус колес r = 5 см. Максимальная скорость вращения моторов w = 1 об/с. Число π примите равным 3. Приведите подробное решение задачи.

Робот может двигаться вперед и делать развороты на месте. Робот первоначально стоит в том направлении, в котором он начнет движение.

Определите:

1) Траекторию, по которой поедет робот. В качестве ответа приведите последовательность посещения роботом узловых точек, например: «A – B – C - D».
2) Время, которое робот будет двигаться по дорогам без учета разворота на месте. Ответ округлите до целых.
3) Минимальное время, за которое робот преодолеет трассу при указанных условиях. Ответ округлите до целых.

Ответ:

1) Траектория, по которой поедет робот: $E – F – G –E –D – C – B – A$ и $A – B – C – D – E – G – F – E$.
2) Время, которое робот будет двигаться по дорогам без учета разворота на месте, равно 135 с.
3) Минимальное время, за которое робот преодолеет трассу при указанных условиях, 146 с.

Критерии проверки:

№	Баллы	Описание
3.1	+3 балла	Правильно определена конфигурация минимальной траектории ($E – F – G –E – D – C – B – A$ или $A – B – C – D –E – G – F – E$)
3.2	+3 балла	Правильно определена суммарная длина прямолинейных участков траектории (30 м)
	+3 балла	Правильно определена длина полуокружности, по которой поедет робот внешним колесом (10,5 м)
	+3 балла	Правильно определено время проезда роботом линейных участков траектории (100 с)
	+3 балла	Правильно определено время, затраченное роботом на проезд по полуокружности внешним колесом (35 с)
3.3	+3 балла	Правильно определена градусная мера угла А ($\angle BAC$) (20°)
	+3 балла	Правильно определен общий угол разворота робота на месте (400°)
	+3 балла	Правильно определено суммарное время, затраченное роботом на разворот на месте, на найденный общий угол разворота на месте (11 с)
	+1 балл	Правильно определено минимальное время, за которое робот преодолеет трассу (146 с)

Если для какого-либо пункта дано неполное обоснование, то можно снижать баллы за данный пункт, ставя балл пропорционально полноте обоснования приведенного решения.

Решение:

Движения робота могут быть трех типов: разворот на месте, проезд по прямолинейным участкам траектории и проезд по дуге окружности.

Определим скорость движения робота на прямолинейном участке траектории:

$$v = 2 \times \pi \times r \times w = 2 \times 3 \times 5 \text{ см} \times 1\frac{1}{\text{с}} = 30\ \frac{\text{см}}{\text{с}}$$

Определим длину прямолинейной части траектории:

$$AB + BC + CD + DE + FE = 5AB = 5 \times 6 = 30 \text{ м}$$

Определим время, которое потребуется роботу для проезда всех прямолинейных участков пути:

$$3000 \text{ см} : 30\ \frac{\text{см}}{\text{с}} = 100 \text{ с}$$

Определим время движения робота по дуге окружности диаметра FE.

При повороте робота по дуге окружности внешнее (по отношению к описываемой роботом дуге) колесо робота проходит больший путь, чем внутреннее колесо. Соответственно, если робот движется по дуге окружности с постоянной по модулю скоростью, то внешнее колесо робота будет вращаться быстрее, чем внутреннее.

Поскольку робот должен двигаться по дуге окружности так, чтобы центр колесной базы оставался на линии, то внешнее колесо робота должно будет описывать окружность диаметра, большего на величину половины колесной базы робота.

Определим длину дуги, которую опишет внешнее колесо робота:

$$\pi \times \left(\frac{FE}{2} + \frac{L}{2}\right) = \frac{1}{2} \times \pi \times (FE + L) = \frac{1}{2} \times 3 \times (6 + 1) = \frac{21}{2} = 10{,}5 \text{ м}$$

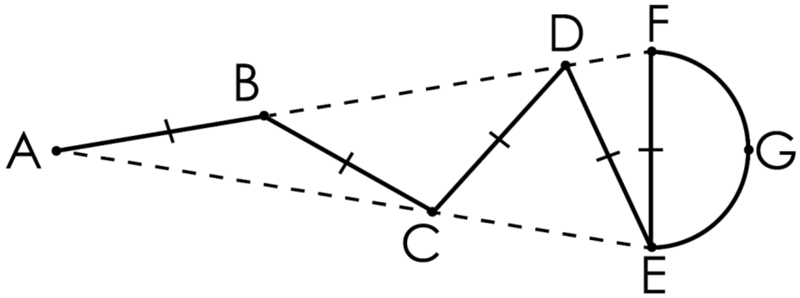
Определим время, за которое внешнее колесо робота преодолеет дугу данной длины, вращаясь со скоростью w = 1 об/с:

$$1050 \text{ см} : 30\ \frac{\text{см}}{\text{с}} = 35 \text{ с}$$

Таким образом, время, которое робот будет двигаться по дорогам без учета разворота на месте, будет равно:

$$100 + 35 = 135 \text{ с}$$

Поскольку робот по условию должен проехать по всем дорогам, то различие во времени движения робота по траектории можно получить только за счет времени, которое робот потратит на развороты на месте.



Определим, чему равны углы в данном треугольнике.

Для этого составим уравнение, воспользовавшись следующими соображениями.

Обозначим $\angle BAC = x$, тогда, поскольку ΔABC равнобедренный, то по свойству равнобедренного треугольника $\angle BAC = \angle BCA = x$.

Тогда $\angle ABC = 180° - (x + x) = 180° - 2x$.

По свойству смежных углов $\angle CBD = 180° - (180° - 2x) = 2x$.

Так как ΔBCD равнобедренный, то по свойству равнобедренного треугольника $\angle DBC = \angle BDC = 2x$.

Тогда $\angle BCD = 180° - (2x + 2x) = 180° - 4x$.

Поскольку $\angle ACE$ развернутый, то $\angle ACE = 180°$.

Тогда

$$\angle DCE = \angle ACE - (\angle ACB + \angle BCD) = 180° - (x + 180° - 4x) =$$

$$= 180° + 3x - 180° = 3x$$

Так как ΔDCE равнобедренный, то по свойству равнобедренного треугольника $\angle DCE = \angle CED = 3x$.

Тогда $\angle CDE = 180° - (3x + 3x) = 180° - 6x$.

Поскольку $\angle BDF$ развернутый, то $\angle BDF = 180°$.

Тогда

$$\angle FDE = \angle BDF - (\angle BDC + \angle CDE) = 180° - (2x + 180° - 6x) =$$

$$= 180° + 4x - 180° = 4x$$

Так как ΔDEF равнобедренный, то по свойству равнобедренного треугольника $\angle FDE = \angle DFE = 4x$.

Так как ΔAEF равнобедренный, то по свойству равнобедренного треугольника $\angle FDE = \angle AFE = \angle AEF = 4x$.

Так как сумма углов треугольника равна 180°, то

$$\angle AFE + \angle AEF + \angle FAE = 180°$$

$$4x + 4x + x = 180°$$

$$9x = 180°$$

$$x = 20°$$

Таким образом, мы сможем вычислить значения всех углов:

$$\angle BAC = \angle BCA = x = 20°$$

$$\angle ABC = 180° - 2x = 180° - 40° = 140°$$

$$\angle DBC = \angle BDC = 40°.$$

$$\angle BCD = 180° - 4x = 100°$$

$$\angle DCE = \angle CED = 3x = 60°$$

$$\angle CDE = 180° - 6x = 60°$$

$$\angle FDE = \angle DFE = 4x = 80°$$

$$\angle DEF = 180° - 8x = 20°$$

Разберемся, из какой точки нам нужно стартовать, чтобы суммарное время разворотов было минимально.

Для того, чтобы пройти по всем дорогам по одному разу, мы можем стартовать либо в точке A, либо в точке E.

При старте из точки A и при первом посещении точки E может быть два варианта дальнейшего проезда:

$$A – B – C – D – E – F – G – E \text{ и } A – B – C – D – E – G – F – E.$$

Для случая $A – B – C – D – E – G – F – E$ сумма углов разворота будет равна:

$$(180° - \angle ABC) + (180° - \angle BCD) + (180° - \angle CDE) + \left(180° - (\angle DEF + 90°)\right) + 90° = 40° + 80° + 120° + 70° + 90° = 400°$$

Для случая $A – B – C – D – E – F – G – E$ сумма углов разворота будет равна:

$$(180° - \angle ABC) + (180° - \angle BCD) + (180° - \angle CDE) + (180° - \angle DEF) + 90° = 40° + 80° + 120° + 160° + 90° = 490°$$

При старте из точки *E* может быть два вариант проезда:

E – F – G – E –D – C – B – A и *E – G – F – E – D – C – B – A*.

Для случая *E – F – G – E – D – C – B – A* сумма углов разворота будет равна:

$$90° + (90° - \angle DEF) + (180° - \angle CDE) + (180° - \angle BCD) + (180° - \angle ABC) =$$
$$= 40° + 80° + 120° + 70° + 90° = 400°$$

Для случая *E – G – F – E – D – C – B – A* сумма углов разворота будет равна:

$$90° + (180° - \angle DEF) + (180° - \angle CDE) + (180° - \angle BCD) + (180° - \angle ABC) =$$
$$= 40° + 80° + 120° + 160° + 90° = 490°$$

Получается, что есть два варианта движения, которые обеспечивают нам меньшее время, чем остальные. Это *E – F – G – E – D - C- B – A* и *A – B – C – D –E – G – F – E*. Рассчитаем время разворота робота на месте:

$$\frac{\pi L}{2\pi rw} \times \frac{400°}{360°} = \frac{L}{2rw} \times \frac{10}{9} = \frac{100 \times 10}{2 \times 5 \times 1 \times 9} = \frac{100}{9} \approx 11 \text{ с}$$

В итоге на преодоление всей трассы робот потратит:

$$135 + 11 = 146 \text{ с}$$