

МОСКОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ. РОБОТОТЕХНИКА. 2024–
2025 УЧ. Г. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП. 7–8 КЛАССЫ
ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

Максимальный балл за работу – 50.

Уважаемые участники!

Для задач №1 и №2 достаточно привести только ответ. Для задач с №3 по №6 приведите подробное решение. При расчётах примите $\pi \approx 3,14$. Для точного ответа округление стоит производить только при получении финального результата.

1. В попытке участвовали роботы Аз, Буки, Веди, Глаголь, Добро. У роботов два, три, четыре, пять и шесть колёс. Среди роботов нет двух таких, у которых одинаковое число колёс. Известно, что:

- робот Аз имеет меньше колёс, чем робот Глаголь
- робот Добро имеет больше колёс, чем робот Глаголь
- у роботов Добро и Аз чётное число колёс
- у робота Веди больше колёс, чем у робота Добро
- у робота Буки нечётное число колёс

Определите, сколько колёс у каждого из роботов. В ответ запишите последовательность заглавных букв, соответствующих первым буквам названий роботов, в порядке *уменьшения* числа колёс, например АБВГД.

Ответ: ВБДГА

За верный ответ – 5 баллов.

Решение

Раз Аз и Добро имеют чётное число колёс, то у них могут быть 2, 4 или 6 колёс.

Раз у робота Буки нечётное число колёс, то у него может быть 3 или 5 колёс.

Заполним таблицу с учётом имеющихся данных.

	А	Б	В	Г	Д
2		–			
3	–				–
4		–			
5	–				–
6		–			

Робот Аз имеет меньше колёс, чем робот Глаголь, робот Добро имеет больше колёс, чем робот Глаголь, и у робота Веди больше колёс, чем у робота Добро, значит, можно записать:

$$A < Г < Д < В$$

Заполним таблицу с учётом имеющихся данных.

	А	Б	В	Г	Д
2	+	–	–	–	–
3	–	–	–	+	–
4	–	–	–	–	+
5	–	+	–	–	–
6	–	–	+	–	–

Расположим первые буквы названий роботов в порядке уменьшения числа колёс, от большего к меньшему. Получим ответ ВБДГА.

№ п/п	Критерий	Баллы
1	Приведён верный ответ (ВБДГА)	5
2	Во всех других случаях	0

2. Робот оснащён двумя отдельно управляемыми колёсами радиуса 8 см. Колёса напрямую подсоединены к моторам. Левым колесом управляет мотор А, правым колесом управляет мотор В. Ширина колеи равна 2 дм 4 см. Моторы так закреплены на роботе, что если оба мотора повернутся на 10° , то робот поедет прямо вперёд.

Робот выполнил следующие три действия последовательно:

- 1) мотор В повернулся на 540° , и при этом мотор А был выключен;
- 2) мотор А повернулся на 540° , и при этом мотор В был выключен;
- 3) мотор А повернулся на 270° , и одновременно с этим мотор В повернулся на (-270°).

Определите, на каком расстоянии от своего первоначального положения оказалась точка, расположенная в центре колеса В, после окончания третьего действия. Ответ дайте в сантиметрах.

Ответ: 72 см

За верный ответ – 5 баллов.

Решение

$$2 \text{ дм } 4 \text{ см} = 24 \text{ см}$$

Посчитаем, на какой угол вокруг колеса А повернётся робот.

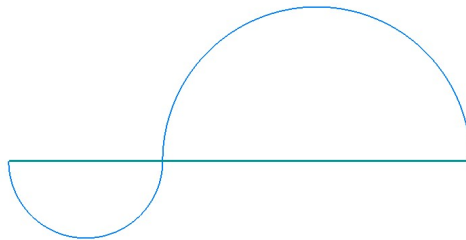
$$\frac{540^\circ \cdot 8}{24} = 180^\circ$$

При повороте вокруг колеса В центр колеса В повернётся вокруг своей оси на 180° .

Определим угол, на который повернётся робот при танковом повороте.

$$\frac{270^\circ \cdot 8}{12} = 180^\circ$$

Изобразим траекторию движения точки, расположенной в центре колеса В.



После первого движения робота центр колеса В окажется на расстоянии

$$24 \cdot 2 = 48 \text{ см}$$

от своего первоначального положения. После третьего движения центр колеса В переместится на 24 см дальше от предыдущего положения.

Таким образом, расстояние, на которое переместится центр колеса В, будет равно:

$$48 + 24 = 72 \text{ см}$$

№ п/п	Критерий	Баллы
1	Приведён верный ответ (72 см)	5
2	Дан верный ответ, но в неверных единицах измерения (7,2 дм)	3
3	Во всех других случаях	0

3. Из нескольких шестерёнок и мотора Вася собрал двухступенчатую передачу. На оси мотора находится шестерёнка с 12 зубьями, на ведомой оси первой ступени – шестерёнка с 20 зубьями, на ведущей оси второй ступени – шестерёнка с 48 зубьями, на ведомой оси передачи – шестерёнка с 12 зубьями.

На ведомую ось передачи Вася посадил сделанные из картона лопасти вентилятора.

А. Определите, во сколько раз ведомая ось передачи вращается быстрее, чем ось мотора. Ответ дайте в виде десятичной дроби.

Ответ: в 2,4 раза быстрее

За верный ответ – 5 баллов.

Б. После включения программы лопасти начали вращаться с частотой 1 оборот в секунду. Определите, сколько оборотов совершит ось мотора за 2 минуты.

Ответ: 50 оборотов

За верный ответ – 5 баллов.

Решение

Определим, во сколько раз ведомая ось передачи вращается быстрее, чем ось мотора.

$$\frac{12}{20} \cdot \frac{48}{12} = \frac{12 \cdot 48}{20 \cdot 12} = \frac{12}{5} = 2,4$$

Определим число оборотов, которое совершит ось мотора за две минуты.

$$\frac{1 \cdot 60}{2,4} \cdot 2 = 50 \text{ (об.)}$$

№ п/п	Критерий	Баллы
Пункт А		
1	Дан полностью верный ответ. Приведено верное обоснование решения (в 2,4 раза быстрее)	5
2	Приведён только верный ответ (в 2,4 раза быстрее)	3
3	Приведено полное решение. Решение верное по сути, но содержит одну ошибку	2
4	В остальных случаях	0
Пункт Б		
1	Дан полностью верный ответ. Приведено верное обоснование решения (50 об.)	5
2	Приведён только верный ответ (50 об.)	3
3	Приведено полное решение. Решение верное по сути, но содержит одну ошибку	2
4	В остальных случаях	0

4. Робот оснащён двумя отдельно управляемыми колёсами, диаметр каждого из колёс робота равен 8 см. Левым колесом управляет мотор А, правым колесом управляет мотор В. Колёса напрямую подсоединены к моторам. Ширина колеи робота равна 24 см.

Посередине между колёс робота закреплена кисть. Робот с помощью кисти начертил прямоугольник АВСЕ. При проезде по стороне АВ оси моторов повернулись на 5580° . При проезде по стороне ВС каждое из колёс совершило на 6 оборотов меньше, чем при проезде по стороне АВ.

А. Определите длину стороны ВС. Ответ дайте в сантиметрах с точностью до целых.

Ответ: 239 см

За верный ответ – 5 баллов.

Б. Определите площадь прямоугольника АВСЕ. Ответ дайте в квадратных дециметрах, округлив результат до целых.

Ответ: 929 дм²

За верный ответ – 5 баллов.

Решение

$8 \cdot \pi = 8\pi$ (см) – длина окружности колеса робота

$5580 : 360 = 15,5$ (об.) – число оборотов при проезде по стороне АВ

$15,5 - 6 = 9,5$ (об.) – число оборотов при проезде по стороне ВС

$15,5 \cdot 8\pi = 124\pi$ (см) – длина стороны АВ

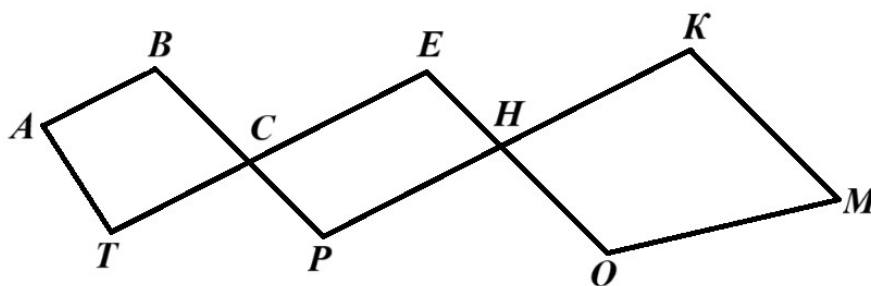
$9,5 \cdot 8\pi = 76\pi = 238,64 \approx 239$ (см) – длина стороны ВС

$124\pi \cdot 76\pi = 9424 \cdot (3,14)^2 = 92916,8704$ (см²) – площадь прямоугольника АВСЕ
 $92916,8704 \text{ см}^2 = 929,168704 \text{ дм}^2 \approx 929 \text{ дм}^2$

№ п/п	Критерий	Баллы
Пункт А		
1	Дан полностью верный ответ. Приведено верное обоснование решения (239 см)	5
2	Приведён только верный ответ (239 см)	3
3	Приведено полное решение. Решение верное по сути, но содержит одну ошибку	2
4	Ответ приведён не с требуемой точностью	-1
5	Ответ приведён не в требуемых единицах измерения	-1
6	В остальных случаях	0
Пункт Б		
1	Дан полностью верный ответ. Приведено верное обоснование решения (929 дм ²)	5
2	Приведён только верный ответ (929 дм ²)	3

3	Приведено полное решение. Решение верное по сути, но содержит одну ошибку	2
4	Ответ приведён не с требуемой точностью	-1
5	Ответ приведён не в требуемых единицах измерения	-1
6	В остальных случаях	0

5. Робот-чертёжник движется по ровной горизонтальной поверхности и наносит на неё изображение (см. *Рисунок*) при помощи кисти, закреплённой посередине между колёс.



Рисунок

Известно, что $AB \parallel TE \parallel PK$, $BP \parallel EO \parallel KM$, $\angle BAT = \angle ATC$, $\angle HOM$ на 30° больше, чем $\angle ABC$, $\angle KMO$ на 20° меньше, чем $\angle HKM$.

Все повороты робот должен совершать на месте. Робот не может ехать назад. Робот должен проехать по каждому отрезку траектории ровно по одному разу.

А. Определите величину угла В. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 85°

За верный ответ – 5 баллов.

Б. Определите минимальный суммарный угол поворота робота, на который он должен повернуться при проезде по всей траектории. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 625°

За верный ответ – 5 баллов.

Справочная информация

Под суммарным углом поворота понимается сумма величин углов поворотов, при этом направление поворотов робота не учитывается.

Решение

Чтобы определить угол поворота робота, надо определить градусные меры углов.

Так как $\angle BAT = \angle ATC$ и $AB \parallel TE$, то:

$$\angle BAT = \angle ATC = 180^\circ : 2 = 90^\circ$$

Обозначим за x градусную меру $\angle ABC$.

По свойству односторонних углов при параллельных прямых:

$$\angle BCT = 180^\circ - x.$$

По свойству вертикальных углов:

$$\angle BCT = \angle ECP, \angle ENP = \angle KNO$$

$$\angle BCT = \angle ECP = 180^\circ - x.$$

По свойству накрестлежащих углов при параллельных прямых:

$$\angle ABP = \angle BPK = x.$$

По свойству односторонних углов при параллельных прямых:

$$\angle KNO = \angle ENP = 180^\circ - \angle CPN = 180^\circ - x.$$

По свойству односторонних углов при параллельных прямых:

$$\angle SEN = 180^\circ - \angle PCE = 180^\circ - (180^\circ - x) = x.$$

По свойству односторонних углов при параллельных прямых:

$$\angle НКМ = 180^\circ - \angle КНО = 180^\circ - (180^\circ - x) = x.$$

По условию $\angle НОМ = \angle НКМ + 30^\circ = x + 30^\circ$.

По условию $\angle КМО = \angle НКМ - 20^\circ = x - 20^\circ = x - 20^\circ$.

По свойству односторонних углов при параллельных прямых:

$$\begin{aligned} \angle НОМ + \angle КМО &= x + 30^\circ + x - 20^\circ = 180^\circ \\ x &= 85^\circ. \end{aligned}$$

$$\angle ABC = \angle BPK = \angle PKM = 85^\circ$$

$$\angle ENP = \angle KNO = \angle ENP = \angle KNO = 180^\circ - x = 95^\circ$$

$$\angle BAT = \angle ATC = 180^\circ / 2 = 90^\circ$$

$$\angle НОМ = x + 30^\circ = 85^\circ + 30^\circ = 115^\circ$$

$$\angle КМО = x - 20^\circ = 85^\circ - 20^\circ = 65^\circ.$$

Сумма углов поворота робота зависит от точки старта. Направление обхода траектории не имеет значения. По условию задачи робот не может ехать назад.

В качестве точки старта выгоднее всего выбрать вершину угла, градусная мера которого минимальна из указанных углов, то есть выгоднее всего стартовать в вершине М.

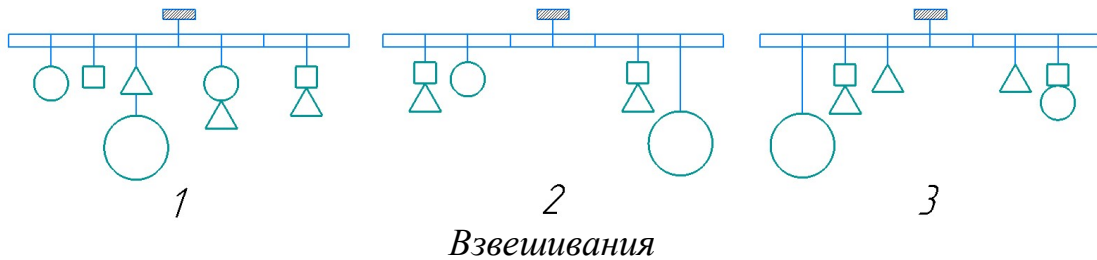
Чтобы минимизировать угол поворота, мы будем проезжать через вершины С и Н насквозь, не останавливаясь и не поворачиваясь в них.

Посчитаем градусную меру минимального суммарного угла поворота.

$$\begin{aligned} (180^\circ - 85^\circ) + (180^\circ - 85^\circ) + (180^\circ - 85^\circ) + (180^\circ - 90^\circ) + \\ + (180^\circ - 90^\circ) + (180^\circ - 85^\circ) + (180^\circ - 115^\circ) = 625^\circ \end{aligned}$$

№ п/п	Критерий	Баллы
Пункт А		
1	Дан полностью верный ответ. Приведено верное обоснование решения (85°)	5
2	Приведён только верный ответ (85°)	3
3	Приведено полное решение. Решение верное по сути, но содержит одну ошибку	2
4	В остальных случаях	0
Пункт Б		
1	Дан полностью верный ответ. Приведено верное обоснование решения (625°)	5
2	Приведён только верный ответ (625°)	3
3	Приведено полное решение. Решение верное по сути, но содержит одну ошибку	2
4	В остальных случаях	0

6. В наборе есть два шара разного размера, несколько одинаковых кубов и несколько одинаковых треугольных пирамид. С помощью равноплечных весов (балку подвесили на штатив) элементы из набора смогли уравновесить. Произвели три взвешивания (см. *Взвешивания*).



Известно, что длина балки весов равна 1 м 6 дм. Для удобства использования весов поперёк балки сделали засечки, расположенные на равном расстоянии друг от друга. Балка подвешена за середину. Масса одной пирамиды равна 30 г. Массой балки и крепёжных элементов можно пренебречь.

А. Определите массу куба. Ответ дайте в граммах.

Ответ: 120 г

За верный ответ – 5 баллов.

Б. Определите массу шара большего размера. Ответ дайте в граммах.

Ответ: 90 г

За верный ответ – 5 баллов.

Решение

Балка разделена засечками на равные части. Так как длина рычага не имеет значения, а важно только соотношение между длинами плечей, то при записи условия равновесия рычага будем измерять плечи в количестве частей.

Обозначим массу куба за x , обозначим за y массу меньшего шара, обозначим за z массу большего шара и составим уравнения.

$$3y + 2x + z + 30 = y + 30 + 3x + 3 \cdot 30$$

$$3x + 3 \cdot 30 + 2y = 2x + 2 \cdot 30 + 3z$$

$$3z + 2x + 2 \cdot 30 + 1 \cdot 30 = 2 \cdot 30 + 3x + 3y$$

Упростим уравнения.

$$x - 2y - z = -90$$

$$x + 2y - 3z = -30$$

$$x + 3y - 3z = 30$$

Решим данные уравнения в системе и получим, что:

$$x = 120, y = 60, z = 90$$

Масса куба равна 120 г, масса меньшего шара равна 60 г, масса большего шара равна 90 г.

№ п/п	Критерий	Баллы
Пункт А		
1	Дан полностью верный ответ. Приведено верное обоснование решения (120 г)	5
2	Приведён только верный ответ (120 г)	3
3	В остальных случаях	0
Пункт Б		
1	Дан полностью верный ответ. Приведено верное обоснование решения (90 г)	5
2	Приведён только верный ответ (90 г)	3
3	В остальных случаях	0

Максимальный балл за работу – 50.